1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUES T - TA

ECOLE DE L'AIR 1979 Option

La composition comprend deux problèmes indépendants

PROBLEME 1

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère affine on considère les trois plans (P_1), (P_2) et (P_3) d'équations :

$$\begin{aligned} (P_1) \quad & x + aby + z = b \\ (P_2) \quad & x + by + az = 1 \\ (P_3) \quad & ax + by + z = 1 \end{aligned} \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

I. Suivant les valeurs du couple (a,b) établir les intersections de ces plans 2 à 2 et déterminer les éventuels points communs aux 3 plans.

II. On envisage maintenant l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé et l'on pose :

$$(a, b) = (-2, -2)$$

Soit (Δ) la droite intersection de (P_1) et (P_2).

Former l'équation du plan (P) contenant (Δ) et orthogonal à (P_1).

III. Soit d un réel positif donné.
Etablir l'équation de la surface, ensemble des points dont la distance à (Δ) est d.
Vérifier que c'est bien l'équation d'une surface cylindrique de génératrices parallèles à (Δ).

PROBLEME 2

La plupart des questions sont, dans une large mesure, indépendantes.

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé, on donne la courbe (Γ) définie paramètriquement par :

$$M \quad \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 2t) \\ y(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

I. Construire la courbe (Γ).

II. Trouver la relation qui existe entre t et t_1 de telle façon que les tangentes à la courbe (Γ) en M(t) et $M_1(t_1)$ soient perpendiculaires.

Calculer en fonction de t ($t \neq 0$) les coordonnées du point P, intersection de ces deux tangentes ; on verra qu'après simplification ces coordonnées peuvent s'écrire sous la forme :

$$x_p = \frac{\Pi_1(t)}{t^2} \qquad y_p = \frac{\Pi_2(t)}{t}$$

Π_1 et Π_2 étant deux fonctions polynômes.

Montrer que x_p et y_p peuvent aussi être exprimées à l'aide du nouveau paramètre u ($u = t - \frac{1}{t}$) de façon à obtenir:

$$x_p = \Pi_3(u) \qquad y_p = \Pi_4(u)$$

Π_3 et Π_4 étant également deux fonctions polynômes.

En déduire l'équation cartésienne de la courbe (Γ_1) décrite par le point P.

.../...

III. Soit Q(x,y) un point quelconque du plan.

Former l'équation donnant les valeurs de t correspondant aux points de contact des tangentes menées par Q à la courbe (Γ).

Déterminer la relation qui lie x et y de telle façon que deux de ces tangentes soient perpendiculaires.

On retrouve ainsi la courbe (Γ_1) ; montrer que (Γ_1) est une parabole dont on définira les éléments géométriques : paramètre, sommet, directrice.

IV. Soient A et B les points de (Γ) correspondant à (t = 1) et (t = -1)
Soit C le point d'intersection des tangentes à (Γ) en A et B.

Calculer l'aire de la surface limitée par le contour :

- segment de droite AC.
- segment de droite CB.
- arc de courbe (Γ) situé entre A et B.

V. La courbe (Γ) étant orientée dans le sens du paramètre t croissant, calculer en fonction de t ($t \neq 1$) :

- les composantes du vecteur tangent unitaire $\vec{T}$ en M (t) à (Γ).

- Les composantes du vecteur normal unitaire $\vec{N}$ en M (t) à (Γ) :

on a : $(\vec{T}, \vec{N}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

- Le rayon de courbure de (Γ) au point M(t), puis les coordonnées du centre de courbure I(t).
On obtient ainsi la développée de (Γ), considérée comme lieu du centre de courbure I(t), (on ne demande pas sa construction).

VI. Retrouver la développée de (Γ) en la considérant comme l'enveloppe des normales à (Γ).

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail